ЭКР ДУ 18-19

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Курс 2 **Семестр** 4 **2018–2019 учебный год**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (4) Найти все действительные решения уравнения

$$y^{(4)} + y'' = 6\sin x - 2\sin 3x.$$

2. (4) Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{5}{2}y + \frac{13}{2}z, \\ \dot{y} = -4x + 3y + 5z, \\ \dot{z} = -4x + 5y + 3z, \end{cases} \qquad (\lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = 2).$$

3. (4) Найти все решения уравнения

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^4 - x^3, \quad x > 0.$$

4. (4) Найти все положения равновесия системы, определить их характер и нарисовать фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 + 7xy + 6y^2, \\ \dot{y} = \ln(2x + y - 2). \end{cases}$$

5. (4) Исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_1^2 \left[x^2(y')^2 - \frac{9}{2}xyy' + \frac{15}{4}y^2 - 12x^3y\right] dx, \qquad y(1) = 0,\ \ y(2) = -4.$$

6. (4) Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые уравнения

$$2(y')^2 + 2xy' + 2y + x^2 = 0.$$

7. (3) В области $x > 2y > 0$ найти все решения уравнения

$$(2x - y)\frac{\partial u}{\partial x} + (2y - x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

и решить задачу Коши $u = \sin(8y^2)$ при $x = 3y$.

8. (4) Решить задачу Коши

$$2yy'' + 2y(y')^4 - (y')^2 = 0, \qquad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1.$$

9. (2) Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $2y'' + \sqrt{1-4x^2}\,y = 0$ имеет на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ не более одного нуля.

МФТИ — 92

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С положением ознакомлен: ______________________________ (Подпись студента)

Вариант 2

+1 +2

1.④ $y(x) = c_1 + c_2x + c_3\cos x + c_4\sin x + 3x\cos x - \frac{1}{36}\sin 3x$.

2.④ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1e^{-2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3e^{2t}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t\right)$. +2.5

+0.5 +0.5 +0.5

+1/2

3.④ $y(x) = c_1x + c_2xe^x - \frac{x^3}{2}$. +1 +1.5

+1 $\begin{cases} c_1'x + c_2'xe^x = 0 \\ c_1' + c_2'(e^x + xe^x) = x^2 - x \end{cases}$

4.④ $(2;-1)$ – седло, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\left(\frac{9}{4}; -\frac{3}{2}\right)$ – устойчивый фокус ↻ $A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{9}{4} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 3

+1 +1

5.④ Уравнение Эйлера $x^2y'' + 2xy' - 6y = -6x^3$, $y(x) = c_1x^{-3} + c_2x^2 - x^3$, $\hat{y} = x^2 - x^3$; $\boxed{-0.5}$

+1

$\Delta J = \int\limits_1^2 (x^2(\eta')^2 + 6\eta^2)\,dx \geq 0$ — абс минимум. +1 Не указано, что $\eta(1) = \eta(2) = 0$

+1.5 | p – диск. + 0.5
особ. +1 рис. +1

6.④ $y = -\frac{x^2}{4}$ – особое решение, $y_c = -\frac{x^2}{2} + cx - c^2 = -\frac{1}{2}(x-c)^2 - \frac{c^2}{2}$.

+1

7.③ $u = F\left(\frac{(x+y)^3}{x-y}\right)$ $\forall F \in C^1$; $u_0 = \sin\left(\frac{(x+y)^3}{4(x-y)}\right)$. $\frac{dx}{2x-y} = \frac{dy}{2y-x} \to \frac{d(x+y)}{x+y} = \frac{d(x-y)}{3x-3y}$ +1.5

+1 +1

8.④ $y = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2}$. $2yp' - p = -2yp^3$ +1 $p = y'$, $p(1) = 1$ | $z = \frac{1}{p^2} \to yz' + z = 2y \to z = y + \frac{c}{y}$
из НУ: $z = y \to y' = \frac{1}{\sqrt{y}} \to y = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}x + c\right)^2}$

9.② Поскольку $\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq \frac{1}{2}$ на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ и решение $z = \cos\frac{x}{\sqrt{2}}$ уравнения $z'' + \frac{z}{2} = 0$ не имеет нулей на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, то по теореме Штурма любое нетривиальное решение исходного уравнения имеет не более одного нуля.