Выполнила:
Маланчук С.В.,
879 группа
Вариант 7

Задача 2.3 (ДКР)

Найти первые интегралы системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = z(x+y) \end{cases}$$

Решение

Перекрестно умножая первое уравнение на второе, получаем:

$$x\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dt}$$

$$x dx - y dy = 0$$

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0$$

$$d\left(x^2 - y^2\right) = 0$$

Значит, $x^2 - y^2 = A$ — первый интеграл.

Проверка:

$$\frac{\partial\left(x^2-y^2\right)}{\partial x}\cdot\dot{x}+\frac{\partial\left(x^2-y^2\right)}{\partial y}\cdot\dot{y}+\frac{\partial\left(x^2-y^2\right)}{\partial z}\cdot\dot{z} = 2x\cdot\dot{x}+2y\cdot\dot{y} = 2xy-2yx = 0$$

Известно, что система n-го порядка имеет ровно $n-1$ независимый первый интеграл.

Найдем второй.

Деля почленно третье уравнение на первое, получаем:

$$\frac{dz\cdot dt}{dt\cdot dx} = \frac{z(x+y)}{y}$$

$$y dz = z(x+y)dx$$

Аналогично, деля первое уравнение на третье, получаем:

$$\frac{dz \cdot dt}{dt \cdot dy} = \frac{z(x+y)}{x}$$

$$x dz = z(x+y) dy$$

Складывая полученные равенства, получаем:

$$(x+y)dz = z(x+y)(dx+dy)$$

$$\left[\begin{array}{c} x = y \\ dz = z(dx+dy) \end{array}\right.$$

Т. к. не можем в общем утверждать, что $x = y$, то

$$\frac{dz}{z} = dx + dy$$

$$d(\ln z) = d(x+y)$$

$$d(\ln z - x - y) = 0$$

Значит, $\ln z - x - y = B$ — первый интеграл.

Проверка:

$$\frac{\partial\left(\ln z - x - y\right)}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial\left(\ln z - x - y\right)}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial\left(\ln z - x - y\right)}{\partial z} \cdot \dot{z} =$$
$$= -1 \cdot \dot{x} - 1 \cdot \dot{y} + \frac{1}{z} \cdot \dot{z} = -y - x + (x+y) = 0$$

Проверим независимость.

Составим матрицу Якоби и выясним ее ранг (должен быть равен 2).

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial z} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2x & -2y & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1}{z} \end{Vmatrix}$$

Видно, что ранг матрицы Якоби равен 2, т. е. интегралы независимы.
Ответ: $A = x^2 - y^2$ и $B = \ln z - x - y$ — независимые первые интегралы системы.