5.11.2021

10 семинар ДУ

Уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} a_k y^{(n-k)} = f(x)$$

$$a_k = const$$

Th. Замена $x = e^t$ $(x > 0)$ сводит УЭ к ур-ю с постоянными коэфф-

УЭ	Ур Пост К
$y = x^\lambda$	$y = e^{\lambda t}$
$y = x^\lambda \ln x$	$y = t e^{\lambda t}$
$\vdots$	$\vdots$
$f(x) = P_m(\ln x)\, x^\mu$	$f(t) = P_m(t)\, e^{\mu t}$
$y_ч = Q_m(\ln x)\, x^\mu \cdot (\ln x)^s$	$y_ч = Q_m(t)\, e^{\mu t}\, t^s$

s - кратность корня хар. ур-я, равного μ

202. $x^2y'' + xy' - 4y = -9x\ln x.$

$y = x^\lambda \quad y' = \lambda x^{\lambda-1} \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$\lambda(\lambda-1) + \lambda - 4 = 0$

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = 2 \qquad$ ФСР: x^2

$\lambda_2 = -2 \qquad x^{-2}$

$y_{og} = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2}$

202. $x^2y'' + xy' - 4y = -9x\ln x.$

$P_m(\ln x) = \ln x(-9)$ $\quad \mu = 1$

$y_r = (A\ln x + B)\,x\,(\ln x)^0$

$y_r' = \left(\frac{A}{x}\right)\cdot x + (A\ln x + B) = A + B + A\ln x$

$y_r'' = \frac{A}{x}$

$Ax + (A+B)x + Ax\ln x - 4x(A\ln x + B) = -9x\ln x$

$A + A + B - 4B = 0 \Rightarrow 2A = 3B$ $\quad B = 2$

$A - 4A = -9 \quad -3A = -9 \quad A = 3$

$$y_r = (3\ln x + 2)\,x$$

$$y = y_r + y_{og} = (3\ln x + 2)\,x + C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2}$$

№613

В задачах **613—618** построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

613. $y_1 = x^2 e^x$. **614.** $y_1 = e^{2x}\cos x$.

615. $y_1 = x\sin x$. **616.** $y_1 = xe^x \cos 2x$.

617. $y_1 = xe^x,\ y_2 = e^{-x}$. **618.** $y_1 = x,\ y_2 = \sin x$.

ФСР: $y_1 = x^2 e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = e^x$

т. е. корень хар. ур-я $\lambda = 1$ кратности 3

$(\lambda - 1)^3 = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

№617

В задачах **613—618** построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

~~**613.**~~ $y_1 = x^2 e^x$. **614.** $y_1 = e^{2x}\cos x$.

615. $y_1 = x\sin x$. **616.** $y_1 = xe^x\cos 2x$.

617. $y_1 = xe^x,\ y_2 = e^{-x}$. **618.** $y_1 = x,\ y_2 = \sin x$.

ФСР: $y_1 = xe^x,\quad y_2 = e^{-x},\quad y_3 = e^x$

$\lambda_{1,2} = 1,\quad \lambda_3 = -1$

$(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1) = 0$

$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda+1) = 0$

$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

<u>Ответ:</u> $y''' - y'' - y' + y = 0$

№618

В задачах **613—618** построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

~~**613.**~~ $y_1 = x^2 e^x$. **614.** $y_1 = e^{2x}\cos x$.

615. $y_1 = x\sin x$. **616.** $y_1 = xe^x\cos 2x$.

~~**617.**~~ $y_1 = xe^x$, $y_2 = e^{-x}$. **618.** $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$.

$y_1 = xe^{0x}$

$y_2 = 1$

λ^2

$y^{IV} + y'' = 0$

$y_3 = \sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$

$e^{ix}, \; e^{-ix}$

$\lambda_{3,4} = \pm i$

$\lambda^2 + 1$

хар. ур-е $\lambda^2(\lambda^2+1) = 0$

$\lambda^4 + \lambda^2 = 0$

$y_4 = \cos x$

$y'' + ay = \sin x$

$\lambda^2 + a = 0$

I. $a = 0$ $\quad \lambda^2 = 0 \quad y_{oo} = C_1 + C_2 x$ $\quad \boxed{y = C_1 + C_2 x - \sin x}$

$y_2 = A \sin x + B \cos x$

$-A \sin x - B \cos x + aA \sin x + aB \cos x = \sin x$

$A(a-1)\sin x + B(a-1)\cos x = \sin x$

$a \neq 1 \longrightarrow A = \frac{1}{a-1} \quad B = 0$

$y_2 = \frac{1}{a-1} \sin x$

$a = 1$ – надо рассматривать отдельно

II $a \neq 0$ $\quad a = b^2 > 0 \quad \lambda^2 + b^2 = 0 \quad \lambda = \pm ib = \pm i\sqrt{a}$

$y_{oo} = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx + \frac{1}{a-1} \sin x \quad a \neq 1$

III $a = 1$ $\quad y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ резонанс!

$$y_2 = (A\sin x + B\cos x)\,x$$

$$y_2'' = -(A\sin x + B\cos x)\,x + 2(A\cos x - B\sin x)$$

$$\cancel{-A\sin x \cdot x} \; \cancel{-B\cos x \cdot x} + \underline{2A\cos x} \underbrace{-2B\sin x}{} +$$

$$+ \cancel{1 \cdot A\sin x \cdot x} + \cancel{1 \cdot B\cos x \cdot x} = \underline{\sin x}$$

$$2A = 0$$

$$-2B = 1 \qquad B = -\frac{1}{2}$$

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

IV $\quad a < 0 \qquad a = -d^2 < 0 \qquad \lambda^2 - d^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm d$

$$y_{oo} = C_1 e^{dx} + C_2 e^{-dx}$$

$$y = C_1 e^{dx} + C_2 e^{-dx} + \frac{1}{a-1}\sin x$$

а) $\underline{I}$ $C_2 = 0 \longrightarrow$ огр.

$\underline{II}$ $\forall C_1, C_2$ – огр.

$\underline{III}$ всегда не огр.

$\underline{IV}$ при C_1 и $C_2 = 0$ – огр.

б) $\underline{I}$ при $\forall C_1 \neq 0$, а $C_2 = 0$ – реш. периód.

$\longrightarrow$ нет

$\underline{II}$ $\underbrace{C_1 \cos\sqrt{a}\,x + C_2 \sin\sqrt{a}\,x}$ $+ \frac{1}{a-1} \sin x$

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{\ldots}} \cos\sqrt{a}x + \frac{C_2}{\sqrt{}} \sin\sqrt{a}x\right)$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\sin\varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

$$\underline{\underline{A}} \sin(\sqrt{a}\,x + \underline{\varphi}) + \frac{1}{a-1} \sin x$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \qquad 2\pi = T_2$$

$$2\pi \cdot k = T \qquad k \in N$$

$$\sqrt{a} \cdot 2\pi l = 2\pi k$$

$$\sqrt{a} = \frac{k}{l}$$

периодич. при $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и $C_1 = C_2 = 0$

III $a = 1$ $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x$

никогда нет период. реш.

IV. при $C_1 = C_2 = 0$ единств. период. реш.