Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

С 8.155

$$y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1) $y'' - y = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$

2) $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$

$y' =$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{x} + C_2' e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^{x} - C_2' e^{-x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{f(x)}{a_0} \end{cases}$$

$$2C_1'(x)e^{x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$2$$

$$C_2'(x)e^{-x} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int C_1'(x)dx = \int \frac{1}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, e^{-2x} d(\underset{u}{\underset{\parallel}{e^x}})$$

$$\int \frac{1}{2} \frac{u - \frac{1}{u}}{u + \frac{1}{u}} \cdot \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{u^2 - 1}{(u^2+1)u^2} du =$$

$$= \frac{1}{2} \Bigg[\underset{\substack{\parallel \\ \operatorname{arctg} u + C}}{\int \frac{1}{u^2+1} du} \Bigg] - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2(u^2+1)} du =$$

$$\frac{1}{u^2(u^2+1)} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2+1} = \frac{u^2+1-u^2}{u^2(u^2+1)}$$

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} + A$$

$$-\int \frac{1}{u^2+1}\,du = -\operatorname{arctg} u + B$$

$$\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} u + \frac{1}{u} + \operatorname{arctg} u + D\right]$$

$$C_1(x) = \operatorname{arctg} e^{x} + \frac{e^{-x}}{2} + D_1$$

$$\int C_2'(x)\,\cancel{dx} = \int \frac{e^x}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,d\underbrace{e^x}_{u}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{u^2 \overset{+1-1}{} - 1}{u^2+1}\,du = -\frac{1}{2}\left[\int \frac{u^2+1}{u^2+1}\,du + \int \frac{-2}{u^2+1}\,du\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(u - 2\,\mathrm{arctg}\,u + A\right) = -\frac{1}{2}\left(e^x - 2\,\mathrm{arctg}\,e^x + A\right)$$

$$y_{\cancel{ч}\ \text{общее}} = e^x \cdot \operatorname{arctg} e^x + \cancel{\frac{1}{2}} + D_1 e^x + \cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)} + e^{-x} \operatorname{arctg} e^x + A_1 e^{-x} =$$

$$(e^x + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^x + A_1 e^{-x} + D_1 e^x$$

$$y_{об} = y_ч + y_{од} =$$

$$y_ч = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$ при $A_1 = D_1 = 0$

при $A_1 \neq 0$ и $D_1 \neq 0$ это будет общее решение неоднородного ур-я

№ 163

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2x}}{1+x^2}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ кратной корень

$y = (C_1 x + C_2)e^{2x} = C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x}$ МВП:

$$\begin{cases} C_1' x \cancel{e^{2x}} + C_2' \cancel{e^{2x}} = 0 & (1) \\ C_1' \cdot (xe^{2x})' + C_2' \cdot (e^{2x})' = \dfrac{2e^{2x}}{1+x^2} = \dfrac{f(x)}{a_0} & (2) \end{cases}$$

$$C_1' \cdot (\cancel{e^{2x}} + x\cancel{e^{2x}} \cdot 2) + C_2' \cdot \cancel{e^{2x}} \cdot 2 = \frac{2\cancel{e^{2x}}}{1+x^2} \quad (2a)$$

$$C_1'(1+2x) + C_2' \cdot 2 = \frac{2}{1+x^2} \quad (2a)$$

$$2C_1' \cdot x + 2 \cdot C_2' = 0$$

$(2a) - 2 \cdot (1)$

$$C_1' = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \quad C_2' = -\frac{2x}{1+x^2}$$

$$C_1' = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow C_1 = 2\,\mathrm{arctg}\,x + A_1$$

$$C_2' = -\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow dC_2 = -\frac{d(x^2)}{1+x^2} \Rightarrow C_2 = -\ln(1+x^2) + A_2$$

Ответ:

$$y = C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x} = (2\,\mathrm{arctg}\,x + A_1)\,x \cdot e^{2x} + (-\ln(1+x^2) + A_2) \cdot e^{2x}$$

$$y = (2x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln(1+x^2))\,e^{2x} + A_1 x e^{2x} + A_2 e^{2x}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^{(k)} \cdot a_k = f(x)$$ — уравнение Эйлера

замена $x>0$; $x = e^t$, $t = \ln x$

$(x<0$; $x = -e^t)$

сводит УЭ к ур-ю с пост. коэфф.

$$y(x) = \tilde{y}(t)$$

$$y'_x = \tilde{y}'_t \cdot t_x = \frac{1}{x}\tilde{y}'_t$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{1}{x}\tilde{y}'_t\right)'_x = -\frac{1}{x^2}\tilde{y}'_t + \frac{1}{x}\tilde{y}''_{tt} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\tilde{y}''_{tt} - \tilde{y}'_t\right)$$

$$y'''_{xx} \ldots$$

Но! гораздо быстрее решать следующим образом

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \tilde{y}^{(n-k)}(t) = \tilde{f}(t)$$ реш. ищем в виде $e^{\lambda t}$

замена $x = e^{t}$

x^{λ}

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{x^k x^{\lambda-k}}_{= x^{\lambda}} \cdot \lambda \cdot (\lambda-1) \cdot \ldots \cdot (\lambda-k+1) = 0$$

$x \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda(\lambda-1) \cdot \ldots \cdot (\lambda-k+1) = 0$$ сразу получим хар. ур-е

? кратности корень

$e^{\lambda t}$	x^{λ}
$t e^{\lambda t}$	$x^{\lambda} \cdot \ln x$
$t^2 e^{\lambda t}$	$x^{\lambda} \cdot \ln^2 x$

? $e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm i \sin\beta t)$

$x^{\alpha}(\cos(\beta \ln x) \pm i \sin(\beta \ln x))$

№197

$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\lambda(\lambda-1) + 3\lambda + 1 = 0$

$\lambda^2 - \lambda + 3\lambda + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = -1$

$$\boxed{y = C_1 \cdot x^{-1} + C_2 x^{-1} \ln x}$$

резонанс

$\frac{1}{x} = x^{-1} \cdot P_0(\ln x)$ можно использовать МНК

$y = x^{\lambda}$ $y' = \lambda x^{\lambda-1}$

$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$x^{\mu} P_m(\ln x)$

$y_r = Q_m(\ln x)\, x^{\mu} (\ln x)^s$

s – кратность корня характеристического ур-я равного μ

$y_{r_1} = x^{-1} \cdot C(\ln x)^2 = y_r$

$y_r' = -\frac{1}{x^2} C(\ln x)^2 + x^{-1} C \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{C\ln x}{x^2}(-\ln x + 2)$

$y_r'' = -2\frac{C\ln x}{x^3}(-\ln x + 2) + \frac{C\cdot 1}{x^2\cdot x}(-\ln x + 2) + \frac{C\ln x}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{C}{x^3}\cdot(+2\ln^2 x - 4\ln x -$

$-\ln x + 2 - \ln x) = \frac{C}{x^3}(+2\ln^2 x - 6\ln x + 2)$

$$y'' = \frac{2C}{x^3}\ln^2 x - \frac{6C\ln x}{x^3} + \frac{2C}{x^3}$$

$$\frac{C}{x^3}\left(+2\ln^2 x-6\ln x+2\right)=y_2''$$

$$x^2y''+3xy'+y=\frac{1}{x}$$

$$\frac{C\ln x}{x^2}\left(-\ln x+2\right)=y_2'$$

$$\frac{C}{\cancel{x}}\left(+2\ln^2 x-6\ln x+2\right)+\frac{3C}{\cancel{x}}\left(-\ln^2 x+2\ln x\right)+\frac{C}{\cancel{x}}\ln^2 x=\frac{1}{x}$$

$$C\left(\cancel{2\ln^2 x}-\cancel{6\ln x}+2+\cancel{\left(-3\ln^2 x\right)}+\cancel{6\ln x}+\cancel{\ln^2 x}\right)=1$$

$$C=\frac{1}{2}$$

Ответ:

$$y=x^{-1}\cdot C_1+C_2x^{-1}\ln x+\frac{\ln^2 x}{2x}$$

$$y_{ч}=\frac{\ln^2 x}{2x}$$